ReBraM, v. 28, n. 2, Araraquara-SP. e-20252273, 153-172, 2025.

ISSN 2527-2675 https://doi.org/10.25061/2527-2675/ReBraM/2025.v28i2.2273

Deformada e solicitações internas de vigas isostáticas empregando funções de descontinuidade: desenvolvimento de um *software*

Albert Willian Faria*; Júlia Fontanesi Sousa*.

*Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM, Brasil.

Autor para correspondência e-mail: awfaria2021@gmail.com

Palavras-chave
Linha elástica
Esforços solicitantes
Momento de inércia
MATLAB

Keywords
Elastic line
Soliciting forces
Moment of inertia
MATLAB

Resumo: Esse trabalho apresenta o desenvolvimento de um novo aplicativo numérico, chamado "Magie", que utiliza funções matemáticas de descontinuidade para calcular os esforços internos e deslocamentos generalizados de vigas biapoiadas com múltiplos carregamentos. Desenvolvido na plataforma MATLAB, o aplicativo pode calcular o momento fletor M, o esforço cortante V, a linha elástica v(x), a inclinações θ (x), a rotação θ, a flecha v e as reações de apoio de vigas biapoiadas, homogêneas e isotrópicas, com carregamentos uniformemente distribuídos, força e momento concentrados. Sua interface é amigável, com janelas, botões, guias e gráficos. As entradas incluem a geometria da viga (posições dos apoios, comprimento e seção transversal), os carregamentos aplicados e o módulo de Young (E). Os resultados numéricos obtidos são validados por comparações com as soluções exatas e numéricas da literatura. As equações diferenciais que regem o problema são formuladas em termos das funções de descontinuidade, reduzindo o número de incógnitas em comparação com as soluções tradicionais que usam funções por trecho da viga. Gratuito e em português, o aplicativo segue o sistema nacional de traçado de diagramas de solicitações internas e é útil para disciplinas teóricas e práticas dos cursos de engenharia.

Deformation and internal forces of statically determinate beams using discontinuity functions: development of software

Abstract: This work presents the development of a new numerical application called "Magie", which uses mathematical discontinuity functions to calculate internal forces and generalized displacements of simply supported beams with multiple loads. Developed on the MATLAB platform, the application can calculate the bending moment M, shear force V, elastic line v(x), slopes θ(x), rotation θ, deflection v, and support reactions of simply supported, homogeneous, and isotropic beams with uniformly distributed loads, concentrated forces, and moments. Its user-friendly interface includes windows, buttons, guides, and graphs. The inputs include the geometry of the beam (positions of the supports, length, and cross-section), the applied loads, and Young's modulus (E). The numerical results obtained are validated by comparisons with exact and numerical solutions from the literature. The differential equations governing the problem are formulated in terms of discontinuity functions, reducing the number of unknowns compared to traditional solutions that use functions by beam segment. Free and in Portuguese, the application follows the national system for plotting internal force diagrams and is useful for theoretical and practical courses in engineering.

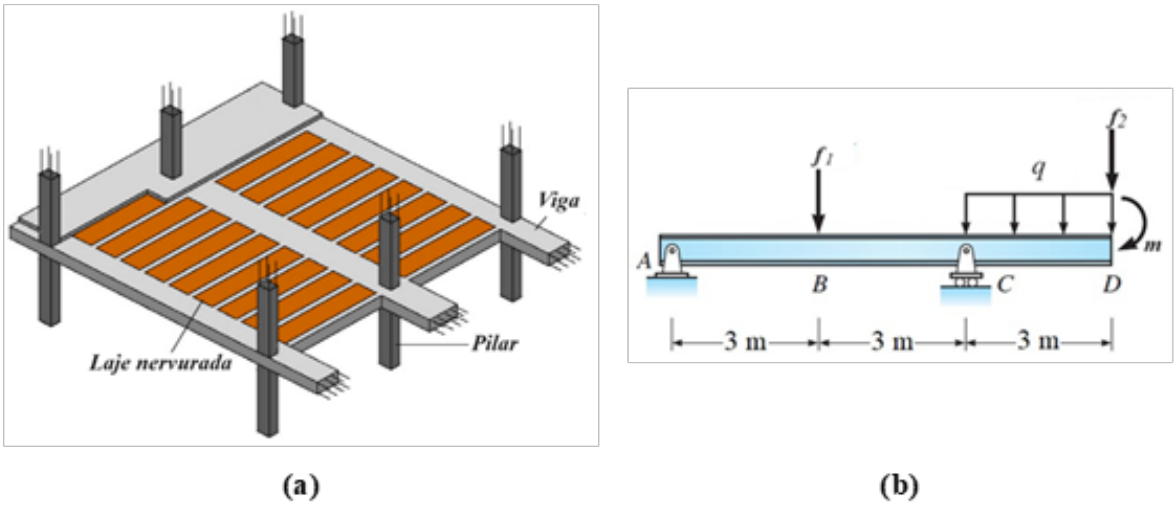
Recebido em: 07/2024
Aprovação final em: 10/2024

Introdução

Sistemas estruturais, como pontes, cais, silos, torres de transmissão e barragens, são projetados para suportar e transmitir carregamentos externos aos quais são submetidos a outros sistemas, como o solo ou a rocha de suporte, sem sofrer rupturas ou deslocamentos excessivos.

Devido à sua complexidade geométrica e às diversas cargas que podem ser aplicadas, esses sistemas são concebidos usando múltiplos modelos físicos mais simples, conhecidos como elementos estruturais, que incluem pilares, lajes e vigas. O esquema estrutural da edificação mostrada na Figura 1 é de um sistema composto por uma variedade de elementos estruturais que trabalham juntos para transferir os carregamentos externos, proveniente de cargas acidentais (como o vento) e/ou permanentes (como o peso próprio), para os elementos de suporte (fundações) localizados na base da construção e, destes, para o solo de suporte do sistema.

Figura 1 - Principais elementos estruturais que constituem uma edificação típica de um edifício (a) e representação de uma viga isolada desse sistema submetida a solicitações externas (b).



Fonte: (a) Adaptado de Conforti, Minelli e Plizzari (2013), (b) adaptado de Leet, Uang, Gilbert (2018).

Conforme ilustrado na Figuras 1(a), entre os elementos estruturais mais comuns de uma edificação estão as vigas. Vigas, como a ilustrada na Figura 1(b), são elementos estruturais alongados na direção horizontal (ao longo do seu baricentro), suscetíveis à flexão plana. Elas são empregadas para receber e distribuir as solicitações externas provenientes das lajes, que são elementos estruturais planos, e dos pilares, que são elementos estruturais verticais de uma edificação, como ilustrado na Figura 1(a).

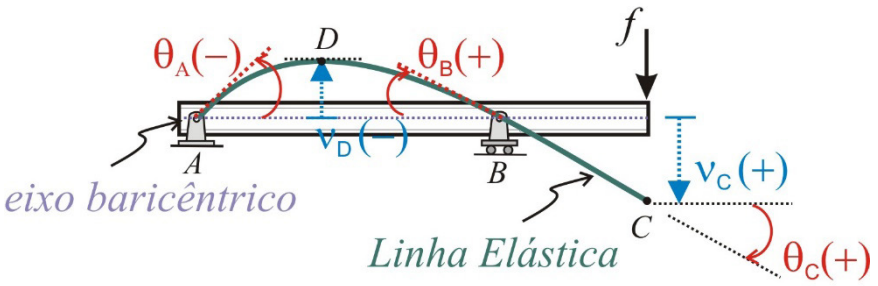
Além da construção civil, as vigas também são utilizadas em diversos outros tipos de sistemas estruturais, como elementos constituintes de hélices de helicópteros, antenas de satélites, asas e fuselagens de aviões, estruturas de cascos de navios, membros de manipuladores robóticos industriais, próteses de membros humanos, entre muitas outras aplicações.

No contexto do projeto estrutural das vigas, é necessário verificar e satisfazer dois estados limites: o *Estado Limite Último* (ELU) e o *Estado Limite de Serviço* (ELS). O ELU está relacionado ao colapso ou qualquer forma de falha estrutural que torne a estrutura inutilizável, comprometendo sua função. Por outro lado, o ELS está ligado à durabilidade da estrutura, sua estética, o conforto dos usuários e sua adequada funcionalidade.

Para investigar esses dois estados limites, é necessário obter as máximas solicitações internas e deslocamentos resultantes das solicitações externas aplicadas. Em vigas planas, as solicitações internas mais comuns são o momento fletor (M) e o esforço cortante (V). A variação dessas

solicitações ao longo do comprimento da viga é representada pelo Diagrama do Momento Fletor (DMF) e Diagrama do Esforço Cortante (DEC). Por outro lado, a variação dos deslocamentos verticais ao longo do seu eixo longitudinal *l* é conhecida como Linha Elástica (LE) ou deformada (*v*) da viga. A LE permite calcular a deflexão vertical v_i (ou flecha), em uma posição x_i ao longo do comprimento horizontal *x*. Além disso, é possível determinar a Inclinação (θ) que a viga pode ter ao longo do seu comprimento, sendo a inclinação em um ponto específico representada pela rotação (θ_i) em uma posição específica x_i ao longo do comprimento *l* da viga. A Figura 2 ilustra as direções (vertical e rotação: horária e anti-horária) e os sentidos (positivo (+) e negativo (-)) adotados neste trabalho para a rotação θ_i e a deflexão vertical v_i, para uma viga submetida a uma força *f*.

Figura 2 - Representação esquemática das direções e sentidos dos deslocamentos generalizados sofridos em uma viga qualquer.



Na Figura 2, o ponto *D* é um ponto de inflexão da Linha Elástica da viga, portanto com $\theta_D = 0$. Já nos apoios A e B, a deflexão vertical é nula, ou seja, $v_A = v_B = 0$.

Existem diversas abordagens para obter esses diagramas e deslocamentos generalizados (deflexões verticais e rotações) aos quais as vigas estão sujeitas, incluindo: *soluções exatas*, que se baseiam no uso de equações diferenciais para descrever o comportamento físico do problema; *métodos analíticos aproximados*, como o Método da Superposição, o Método dos Momentos e o Método das Linhas de Influência; soluções baseadas em *métodos numéricos aproximados*, como o Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas e Métodos Matriciais; além de técnicas de *análise experimental*, como a Modelagem em Escala e os Ensaios Estruturais, entre outras.

Este trabalho se dedica ao uso de Funções de Descontinuidade (FD) para a solução exata das equações diferenciais que governam as formulações da Linha Elástica, inclinação e das solicitações internas (*M* e *V*) de vigas. São estudadas vigas *biapoiadas; isostáticas,* que significa que podem ser calculadas pelas equações de equilíbrio de forças e momentos da Estática; *isotrópicas*, que apresentam módulo de elasticidade constante e independente do deslocamento sofrido pela viga; e *homogêneas*, por apresentarem seção transversal constante e com mesmo material utilizado em toda estrutura.

Apesar de serem bem conhecidas na literatura técnica, a formulação numérica das Funções de Descontinuidade é pouco explorada em artigos técnico-científicos. Nesse contexto, pode-se mencionar o trabalho de Calderón e Souza (2022), que apresenta a formulação matemática das FD aplicadas ao estudo analítico de vigas isostáticas, embora não aborde sua implementação numérica.

O emprego de *softwares* para determinar as solicitações internas, a Linha Elástica e a inclinação de vigas sob solicitações externas é uma prática recorrente no projeto estrutural. No entanto, poucos programas computacionais disponíveis no meio técnico-científico utilizam as FD em sua formulação, se destacando nesse contexto o *software* MDSolids, desenvolvido por Philpot (2014), embora esteja atualmente disponível apenas em língua inglesa e com acesso gratuito por tempo limitado (*free trial*).

Esse trabalho apresenta a metodologia detalhada para a criação de um aplicativo computacional em língua portuguesa chamado "Magie", implementando no ambiente de programação MATLAB,

dedicado a obtenção dos diagramas das solicitações internas (*M* e *V*) e dos deslocamentos generalizados (*v*, v_i, θ, q_i) de vigas isostáticas, isotrópicas, homogêneas e biapoiadas, sujeitas a solicitações externas *w*, formuladas utilizando Funções de Descontinuidade. As solicitações externas *w* podem ser compostas por múltiplas forças concentradas *f*, cargas uniformemente distribuídas *q* e momentos concentrados *m*, aplicados ao longo do comprimento da viga. As cargas horizontais, aplicadas ao longo do eixo horizontal, não serão consideradas nesse trabalho.

Funções de descontinuidade e solicitações internas em vigas isostáticas

Uma Função de Descontinuidade (FD) é caracterizada por sua incapacidade de assumir valores nulos dentro dos limites estabelecidos pela sua formulação matemática. A equação 1 representa matematicamente o momento concentrado *m,* aplicado em uma posição x_i ao longo do comprimento da viga, expresso em termos da FD (HIBBELER, 2019).

$$w_m = m\langle x - x_i \rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & para \quad x \neq x_i \\ m & para \quad x = x_i \end{cases} \tag{1}$$

Além do momento concentrado *m,* podem ser aplicadas em vigas outras solicitações externas, tais como cargas distribuídas (*q*) e forças concentradas (*f*). As expressões das FD para cargas distribuídas *q* e para forças concentradas *f* são dadas, respectivamente, segundo Hibbeler (2019), pelas seguintes equações:

$$w_q = q\langle x - x_i \rangle^{n} = \begin{cases} 0 & para \quad x < x_i \\ q\langle x - x_i \rangle^{n} & para \quad x \geq x_i \end{cases} , com \ n \geq 0 \tag{2}$$

$$w_P = f\langle x - x_i \rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & para \quad x \neq x_i \\ f & para \quad x = x_i \end{cases} \tag{3}$$

Considerando pequenos deslocamentos, ou seja, dentro da região elástica de validade da lei de Hooke, a solicitação externa total (w) agindo sobre uma viga pode ser decomposta nas contribuições dos carregamentos *q*, *f* e *m*. Assim, a solicitação externa total agindo sobre uma viga qualquer pode ser dada através da expressão:

$$w = \sum_{n=1}^{n_q} w_q + \sum_{n=1}^{n_f} w_f + \sum_{n=1}^{n_m} w_m \tag{4}$$

onde: n_q, n_f e n_m são, respectivamente, o número de carregamentos distribuídos, forças concentradas e momentos concentrados aplicados sob a viga.

De acordo com a Teoria da Elasticidade, as solicitações externas *w* e as solicitações internas *V*(*x*) e *M*(*x*), ou simplesmente *V* e *M*, resultantes do equilíbrio estático, estão relacionadas através das equações diferenciais: $dV(x)/dx = w$ e $dM(x)/dx = V$, utilizadas na obtenção dos diagramas DEC (Diagrama do Esforço Cortante) e DMF (Diagrama do Momento Fletor) de uma viga qualquer. A Linha Elástica (*v*) de uma viga pode ser obtida através da equação diferencial: $EI\left(d^2v(x)/dx^2\right) = M(x)$ da Teoria da Elasticidade, sendo *EI* o *módulo de resistência à flexão* da viga, *E* o *módulo de Young* (módulo de elasticidade) do material constituinte da viga, e *I* o *momento de inércia* de sua seção transversal (em relação ao eixo z, perpendicular ao plano *x-y* formado pela viga). A solução exata dessa equação diferencial, para os casos mais simples de vigas descritos em Hibbeler (2019), é obtida por meio de uma dupla integração sucessiva aplicada a cada trecho da viga e nas expressões da Linha Elástica *v* e a inclinação θ da viga. Essas incógnitas, resultantes da integração, são determinadas aplicando-

se as restrições de movimento e rotação (condições de contorno) definidas pelos apoios (vínculos) da viga isostática, bem como as condições de compatibilidade de movimento e rotação observadas entre os trechos da viga.

Como é sabido, os apoios mais comuns em estruturas isostáticas incluem os apoios dos tipos: *fixo* (segundo gênero), que restringem dois movimentos (graus de liberdade) de translação (horizontal e vertical) da viga; *móvel* (primeiro gênero), que restringem somente um movimento de translação (horizontal ou vertical); e o *engaste* (terceiro gênero), quando restringem todos os movimentos (de translação e de rotação) possíveis da viga. Esse trabalho é limitado ao emprego de vigas isostáticas com um apoio móvel e outro fixo, chamadas de vigas biapoiadas, como a ilustrada na Figura 1(b).

O emprego de funções matemáticas "tradicionais", ou seja, não descontinuas, na solução da equação diferencial da Linha Elástica e inclinação requer a resolução de duas incógnitas (c_1 e c_2) por trecho da viga, obtido entre dois carregamentos verticais sucessivos aplicados na viga. Já o emprego das Funções de Descontinuidade permite escrever uma única equação, dependente do $M(x)$ (por sua vez, função da solicitação externa w) e de apenas duas incógnitas (c_1 e c_2) para a modelagem matemática de toda viga.

Metodologia

O *software* comercial MATLAB possui internamente uma ferramenta (*toolbox*) para a criação de uma interface gráfica (GUI, do inglês *Graphic User Interface*) que permite a criação de elementos gráficos variados, como janelas, botões e menus, simplificando a interação entre o código de programação (algoritmo) e os usuários. Isso é especialmente útil para aqueles que não estão familiarizados com a linguagem de programação ou que precisam obter múltiplos resultados por meio do programa sem a necessidade de modificar diretamente seu código.

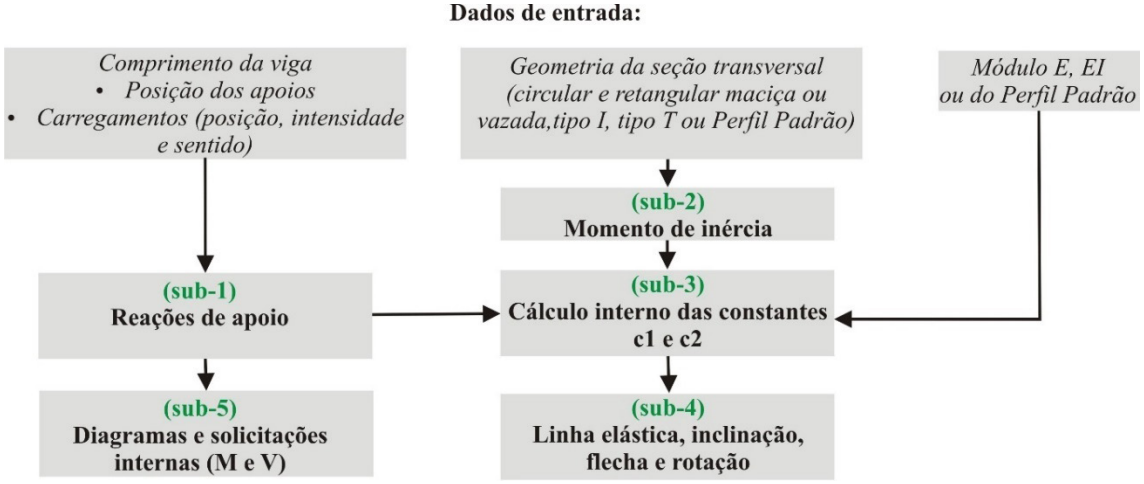
Na literatura científica, existem diversos exemplos de trabalhos desenvolvidos utilizando a GUI do *software* MATLAB. Por exemplo, Hassan e Aboshgifa (2015) utilizaram a interface gráfica do MATLAB para o desenvolver um aplicativo computacional destinado a detectar tumores cerebrais em estágios iniciais por meio do uso de ressonância magnética. Souza e Castillo (2017) empregaram a GUI do MATLAB no desenvolvimento de uma interface gráfica para prever as pressões de saturação de componentes presentes na produção de biodiesel.

No MATLAB, o código de programação do aplicativo computacional desenvolvido foi implementado empregando cinco sub-rotinas distintas, cujas inter-relações são ilustradas no fluxograma apresentado na Figura 3.

Observa-se na Figura 3 que, com exceção da segunda sub-rotina (sub-2), empregada no cálculo do momento de inércia I da seção transversal da viga, todas as demais sub-rotinas dependem da primeira sub-rotina (sub-1) de cálculo das reações de apoio da viga. Além disso, como pode ser observado também nessa mesma figura, o módulo de Young (E) do material constituinte da viga é utilizado apenas na terceira sub-rotina (sub-3), empregada para a obtenção interna no aplicativo das constantes c_1 e c_2, que são fornecidas para a quarta sub-rotina (sub-4) de cálculo dos deslocamentos generalizados da viga. Na quinta sub-rotina (sub-5), são calculas as solicitações internas da viga, na forma dos diagramas do Momento Fletor (DMF) e do Esforço Cortante (DEC) ou das solicitações M_i e V_i em posições especificadas pelo usuário do aplicativo computacional ao longo do comprimento da viga.

A primeira sub-rotina (**sub-1**), apresentada na Figura 3, é escrita sem o uso das Funções de Descontinuidade e contém o algoritmo empregado para o cálculo das reações do apoio da esquerda (A) e da direita (B) da viga. Essas reações são utilizadas nas sub-rotinas sub-3, sub-4 e sub-5 de saída do aplicativo computacional, e, para obtê-las, realiza-se o equilíbrio estático (somatório do momento externo e das forças verticais igual a zero) das solicitações externas w que agem sobre a viga.

Figura 3 - Fluxograma do aplicativo computacional desenvolvido para o cálculo das deformações generalizadas e solicitações internas de vigas isostáticas.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A segunda sub-rotina de programação (**sub-2**), ilustrada na Figura 3, também desenvolvida sem o uso de funções FD, é utilizada para calcular o momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao centroide *z* de sua seção transversal. Nessa primeira versão do aplicativo computacional, foram implementadas somente seções transversais dos tipos: retangular maciça, retangular vazada, circular maciça, tubular, tipo "I" e "T".

As Equações 5 e 6 sumarizam as expressões da Linha Elástica (v) e da inclinação (θ) sofrida pela viga, que são inseridas no código de programação da sub-rotina **sub-3**, escritas empregando Funções de Descontinuidade. Essas expressões também são empregadas para a obtenção da deflexão vertical (v_i) e rotação (q_i) da viga conforme posição x_i de interesse. Já as Equações 7 e 8 sumarizam as expressões empregadas para a obtenção dos diagramas das solicitações internas M e V e das solicitações localizadas M_i e V_i ao longo do comprimento x_i da viga, sendo também escritas em termos das FD na sub-5.

$$v=\left(A\langle x>a\rangle\langle x-a\rangle^3/6+B\langle x>b\rangle\langle x-b\rangle^3/6-\beta x+\alpha-v_q-v_f+v_m\right)/EI \quad (5)$$

$$\theta=\left(A\langle x>a\rangle\langle x-a\rangle^2/2+B\langle x>b\rangle\langle x-b\rangle^2/2-\beta-\theta_q-\theta_f+\theta_m\right)/EI \quad (6)$$

$$M=-A\langle x>a\rangle\langle x-a\rangle^1-B\langle x>b\rangle\langle x-b\rangle^1+M_q+M_f-M_m \quad (7)$$

$$V=A\langle x>a\rangle\langle x-a\rangle^0+B\langle x>b\rangle\langle x-b\rangle^0+V_q-V_f \quad (8)$$

Nessas equações tem-se que a e b são respectivamente as coordenadas x dos apoios esquerdo e direito da viga. Já v_q, v_f e v_m são as contribuições do carregamento uniformemente distribuído (q), força concentrado (f) e momento concentrado m no deslocamento v da viga; q_q, q_f e q_m são as contribuições dessas mesmas solicitações externas na rotação θ da viga; M_q, M_f e M_m são as contribuições dessas solicitações externas no momento interno M; e, V_q e V_f são as contribuições do carregamento uniformemente distribuído e da força concentrada nos valores da solicitação

interna *V* atuante na viga.

As Equações 5 e 6 apresentam os termos α e β, dependentes de c_1 e c_2, dados pelas expressões:

$$\beta = (c_1 - c_2)/(b - a) \qquad \alpha = c_1 + \beta a \qquad (9)$$

As onze variáveis (v_q, v_f, v_m, q_q, q_f, q_m, M_q, M_f, M_m, V_q, V_f) listadas nas Equações 5, 6, 7 e 8, são escritas em termos de FD e seus algoritmos implementado na linguagem MATLAB, são apresentados na Figura 4.

As linhas 19 e 25 da Figura 4 fornecem os algoritmos escritos em termos de FD, empregados no cálculo das solicitações internas *M* e *V*. Já a Linha Elástica e a inclinação, escritos em termos de FD, são apresentados nas linhas 4 e 13 da Figura 4. É importante notar que, quanto maior o módulo *EI*, menores são os deslocamentos generalizados da viga.

Figura 4 - Parte dos algoritmos empregados nas sub-rotinas 3, 4 e 5 para o cálculo das constantes c_1 e c_2, deslocamentos generalizados e solicitações internas das vigas em estudo.

```
01  % Sub-3: constante c1 e c2, obtidas para cada uma das coordenadas (a e b) dos apoios
02  c = -A*(x>a).*(x-a).^3/6 - B*(x>b).*(x-b).^3/6 + vq + vf - vm;
03  % Sub-4: Linha elástica v
04  v = (A*(x>a).*(x-a).^3/6 + B*(x>b).*(x-b).^3/6 - b*x + a - vq - vf + vm)*(1/EI);
05  %Sendo:
06  b = (c1-c2)/(b-a)
07  a = c1+ b*a
08  vq = wq*(x>x0).*(x-x0).^4/24 - wq*(x>x1).*(x-x1).^4/24
09  vF = wf*(x>xf).*(x-xf).^3/6
10  vM = wm*(x>xm).*(x-xm).^2/2
11  % com wq: carga distribuída, wf: força concentrada, wm: momento concentrado
12  % Sub-4: Inclinação q
13  q = (A*(x>a).*(x-a).^2/2 + B*(x>b).*(x-b).^2/2 - b - qq - qf + qm)*(1/EI);
14  %Sendo:
15  qq = wq*(x>x0).*(x-x0).^3/6 - W1*(x>x1).*(x-x1).^3/6
16  qF = wf*(x>xf).*(x-xf).^2/2
17  qM = wm*(x>xm).*(x-xm).^1
18  % Sub-5: Momento fletor interno
19  M = -A*(x>a).*(x-a).^1- B*(x>b).*(x-b).^1 + Mq + Mf - Mm;
20  %Sendo:
21  Mq = .5*wq*(x>x0).*(x-x0).^2 - .5*wq*(x>x1).*(x-x1).^2
22  MF = wf*(x>xf).*(x-xf).^1
23  MM = wm*(x>xm).*(x-xm).^0
24  % Sub-5: Esforço Cortante
25  V = A*(x>a).*(x-a).^0 + B*(x>b).*(x-b).^0 + Vq - Vm;
26  %Sendo:
27  Vq = -wq*(x>x0).*(x-x0).^1 + wq*(x>x1).*(x-x1).^1
28  VM = wf*(x>xf).*(x-xf).^0
```

Fonte: Elaborado pelos autores.

A segunda linha da Figura 4 fornece a expressão geral de cálculo das constantes c_1 e c_2, escritas em termos das FD. Essas constantes dependem das reações de apoio (*A* e *B*) da viga, das contribuições de cada um dos carregamentos (ω_q, ω_f, ω_m) e das posições *a* e *b* de seus apoios. A incógnitas de integração c_1 e c_2 são obtidas quando a variável *x* assume o valor da coordenada *a* ou *b*, respectivamente.

Cada um dos n_q carregamentos distribuídos aplicados sob a viga são armazenados no vetor *vq*, indicado na linha 8 da Figura 4. Cada termo deste vetor é representado por uma função polinomial de quarta ordem ($n = 4$) escrita em termos das FD. Essa função polinomial assume valores somente para as coordenadas *x* maiores que x_0 e x_1, correspondentes as posições inicial e final do carregamento distribuído aplicado sob a viga.

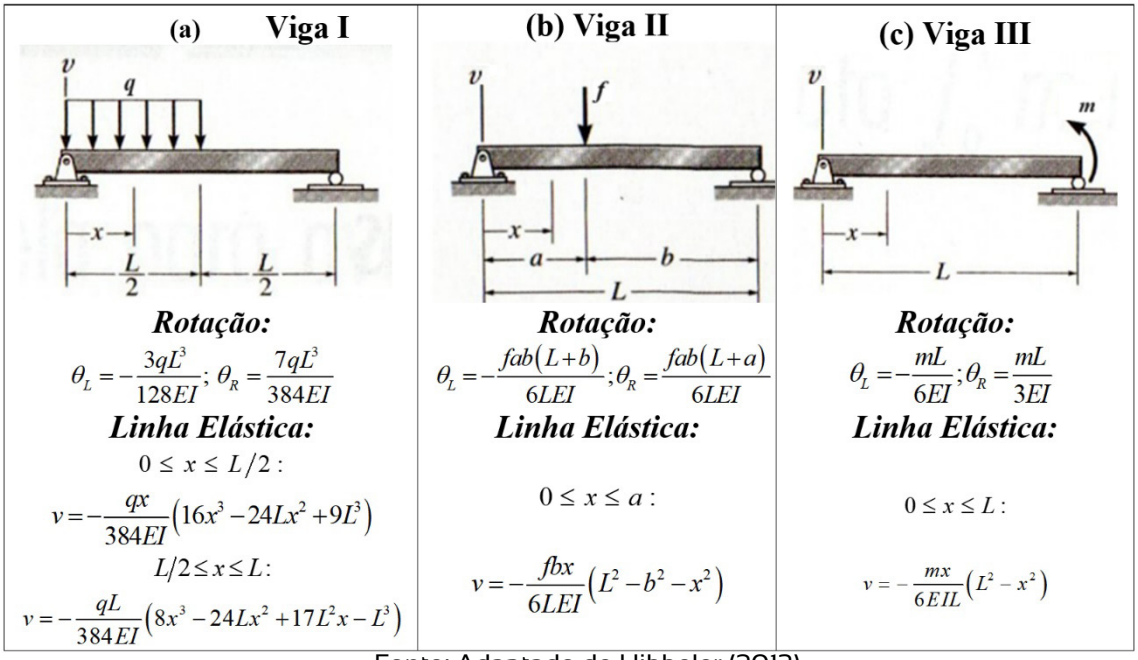
Caso a viga esteja sujeita a pelo menos um carregamento distribuído ($w_q \neq 0$), de acordo com as linhas 4 e 8 da Figura 4, a equação da Linha Elástica assume a forma de uma função polinomial

de quarta ordem. Já a inclinação θ, de acordo com as linhas 13 e 15, assume a forma de uma função polinomial de terceira ordem, enquanto o momento fletor *M*, de acordo com as linhas 19 e 21, assume a forma de uma função polinomial de segunda ordem, e o esforço cortante *V*, de uma função de primeira ordem, de acordo com as linhas 25 e 27.

Na literatura técnico-científica, é possível obter as equações da Linha Elástica (v) e das rotações dos apoios direito (q_R) e esquerdo (θ_L) de vigas biapoiadas sujeitas a carga uniformemente distribuída, força concentrada e momento concentrado sem o emprego das Funções de Descontinuidade, como ilustrado na Figura 5, em (a), (b) e (c).

As expressões fornecidas na Figura 5 são obtidas utilizando a equação diferencial $d^2v/dx^2 = M(x)/EI$, sem o emprego de Funções de Descontituidade, aplicando as condições de contorno e integrando sucessivamente as equações diferenciais resultantes para obtenção das constantes de integração.

Figura 5 - Rotações e equação da Linha Elástica de uma viga biapoiada sujeita a carga uniformemente distribuída (a), carga concentrada (b) e momento concentrado (c).



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2013).

Além das vigas biapoiadas: com carregamento distribuído (Viga I), ilustrada na Figura 5 em (a), com carga concentrada (Viga II), ilustrada em (b), com momento concentrado (Viga III), ilustrada em (c), uma quarta viga (Viga IV) sujeita a esses três carregamentos aplicados simultaneamente também é analisada nas simulações numéricas propostas nesse trabalho. No caso particular desta viga com múltiplos carregamentos, sua solução analítica aproximada consiste simplesmente da soma das rotações (θ_L e q_R) e deflexão vertical (v) das Vigas I, II e III nos pontos de interesse de análise, utilizando o *Princípio da Sobreposiçlão dos Efeitos*. Esse princípio pode ser empregado pois trata-se de vigas de mesma geometria, mesmo módulo de rigidez à flexão (*EI*), e módulo de Young *E* constante e independente da deformação da viga, ou seja, de estruturas sujeitas a pequenas deformações. Essas quatro vigas são implementadas no aplicativo desenvolvido, porém formuladas empregando as Funções de Descontinuidade (FD), e os valores dos deslocamentos generalizados e das solicitações internas obtidos são comparados com os obtidos através das expressões analíticas, ou seja, sem FD, apresentadas na Figura 5.

Para validar os algoritmos e o aplicativo computacional "Magie" desenvolvido no caso mais geral, ou seja, em vigas biapoiadas com balanço, submetidas a múltiplos carregamentos, uma viga

biapoiada com balanço (*CD*) à direita, ilustrada na Figura 1(b) e incluindo seção transversal do tipo "*I*", também será implementada e estuda neste trabalho. Para essa viga específica, chamada de Viga V, os valores dos deslocamentos generalizados e das solicitações internas obtidos no aplicativo "Magie" são comparados com obtidos utilizando o *software* MDSolids.

O Quadro 1 sumariza a geometria e as solicitações externas aplicadas para cada uma das cinco vigas em estudo nesse trabalho, sendo o eixo *x* localizado na posição mais à esquerda das vigas listadas na tabela. Nessa tabela, para cada um dos carregamentos externos listados, são informados o módulo (valor e unidade), o sentido (positivo ou negativo) e a posição de aplicação (entre parênteses) do carregamento.

Quadro 1 - Geometria e carregamentos externos das vigas implementadas no aplicativo computacional "Magie".

Viga	I	II	III	IV	V
Comprimento total (m)	6	6	6	6	9
Balanço (m)	-	-	-	-	3 ($6 \leq x \leq 9$)
Posição dos apoios (m)	A(x=0) B(x=6)	A(x=0) B(x=6)	A(x=0) B(x=6)	A(x=0) B(x=6)	A(x=0) B(x=6)
E (kN/m^2)	-	-	-	-	200x10^6
I (m^4)	-	-	-	-	Seção "*I*"
EI (kN.m^2)	1	1	1	1	2,8392.10^5
q (kN/m) e posição	60 ($0 \leq x \leq 3$)	-	-	60 ($0 \leq x \leq 3$)	12 ($2 \leq x \leq 3{,}5$)
f (kN)	-	20(x=3)	-	20(x = 3)	36(x = 3) 67(x = 9)
m (kN.m)	-	-	1(x = 6)	10(x = 6)	34 (x = 9)

Fonte: Elaborado pelos autores.

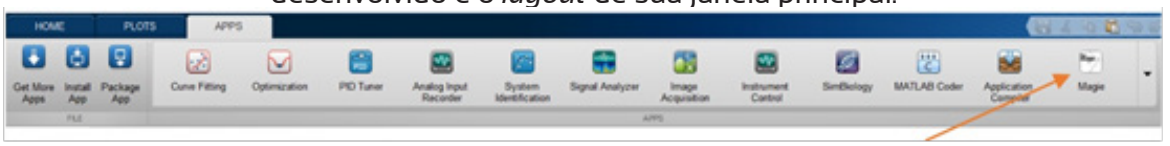
Resultados e Discussão

Viga biapoiada submetida a solicitações externas simples ou múltiplas

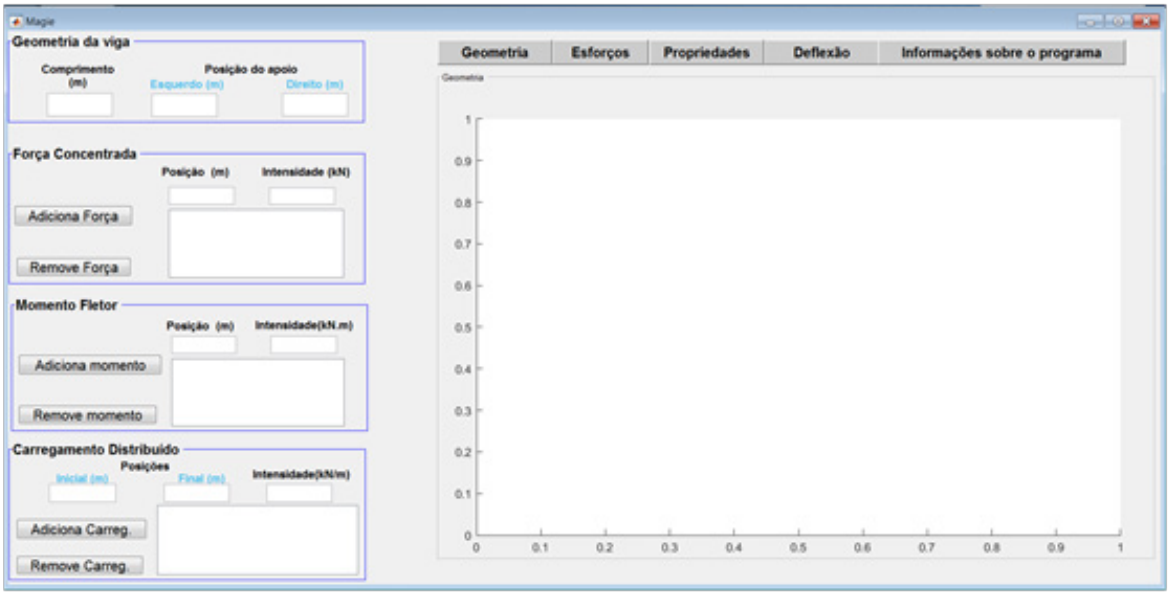
Para modelar a viga no aplicativo computacional desenvolvido, o usuário deve inicialmente selecionar, com o ponteiro do mouse, o aplicativo computacional "Magie" instalado na lista de aplicativos do MATLAB conforme ilustrado na Figura 6, em (a). Ao fazer isso, o usuário visualizará a janela principal do programa, como ilustrado na Figura 6, em (b).

Ao inserir o comprimento e a posição dos apoios direito e esquerdo da viga no item "Geometria da viga", localizado do lado esquerdo na janela principal do aplicativo computacional, e em seguida selecionar a aba intitulada "Geometria", a geometria da viga biapoiada pode ser visualizada conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 6 - Lista de aplicativos padrões do *software* MATLAB contendo o aplicativo computacional desenvolvido e o *layout* de sua janela principal.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na opção "Carregamento Distribuído", localizada na parte inferior do lado esquerdo da janela principal do aplicativa, a posição inicial, final e a intensidade desse carregamento aplicado sob a viga podem ser inseridas digitando os valores correspondentes nas caixas "Inicial (m)", "Final (m)" e "Intensidade (kN/m)", conforme ilustrado na Figura 8.

É importante notar que a primeira versão do aplicativo "Magie" empregada unidades de comprimento em metros e forças em kN. Além disso, a plotagem do Diagrama do Momento Fletor (DMF) segue a convenção nacional, em que o momento fletor positivo (+M) é desenho na parte inferior da viga, enquanto o momento negativo (-M) é representado na porção superior.

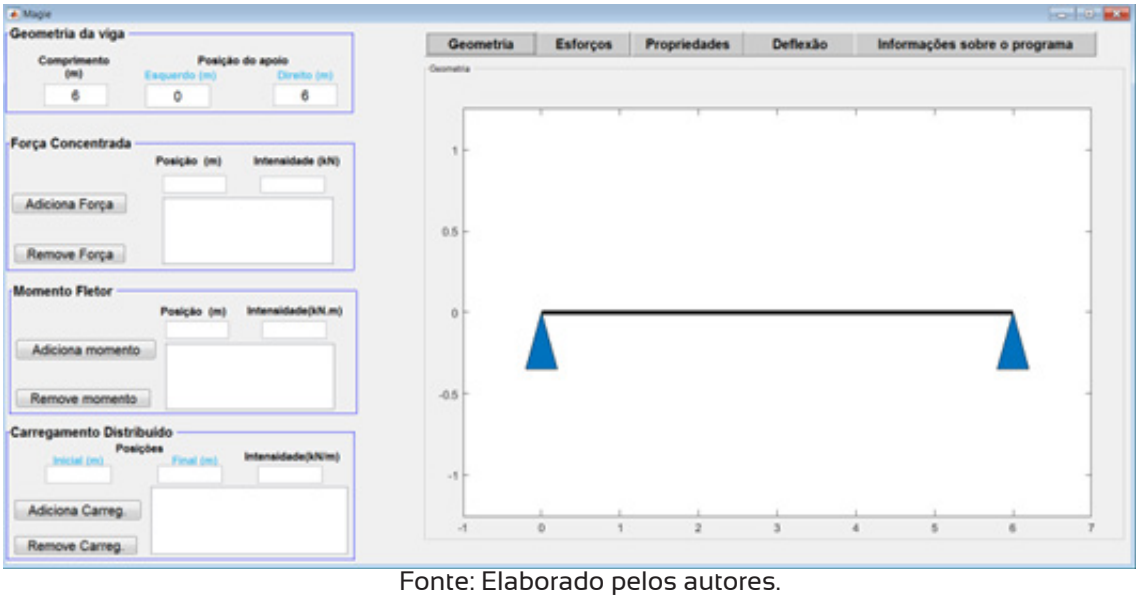
O usuário pode acrescentar diversos carregamentos externos sob a viga clicando no botão "Adicionar Carreg.", ou seja, adicionar carregamento. Também pode editá-los ou eliminá-los conforme o seu interesse ao selecionar o botão "Remove Carreg.". Como padrão, cargas distribuídas ou forças concentradas aplicadas no sentido para baixo são adotadas como positivas e são visualizadas no aplicativo computacional aplicadas na parte superior da viga. Quando haver um momento concentrado, como ilustrado na Figura 4, em c, essa solicitação externa é adotada positiva se ache no sentido horário.

Ao selecionar com o ponteiro do mouse a aba "Esforços", localizada nos menus horizontais da parte superior da janela principal do aplicativo computacional, os Diagramas do Esforço Cortante (DEC), em kN, e do Momento Fletor (DMF), em kN.m, são plotados nas janelas correspondentes, conforme pode ser observado na Figura 9.

O aplicativo computacional desenvolvido permite a obtenção das solicitações internas V_i e M_i em pontos x_i escolhidos pelo usuário ao longo do comprimento da viga, conforme pode ser observado na Figura 9, no item "Esforços conforme posição". Os valores desses esforços são apresentados

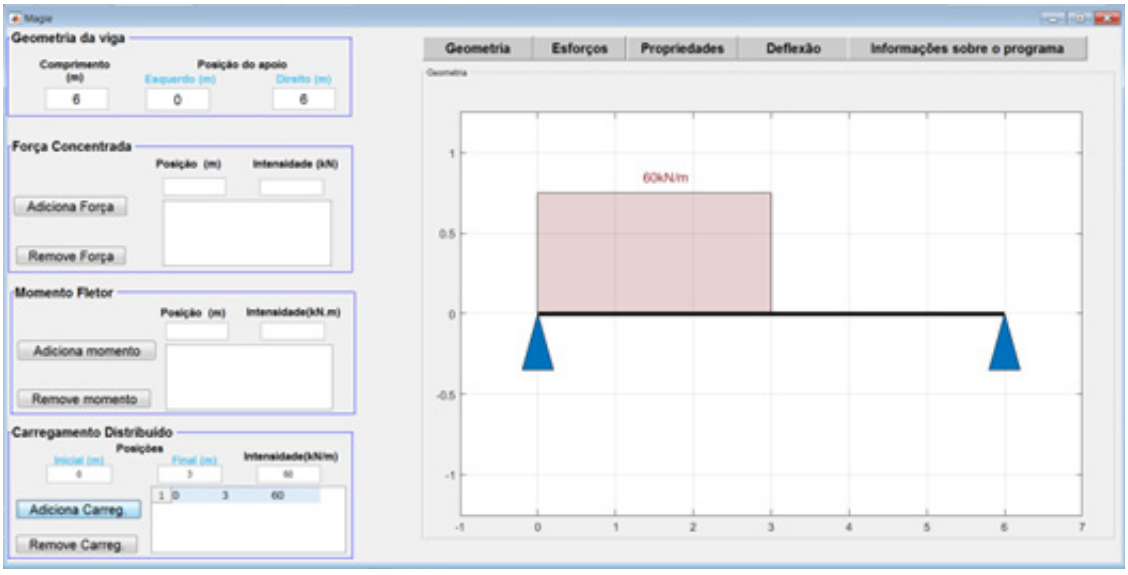
pelo aplicativo ao clicar no botão "Valor" desse item. Já as reações de apoio da viga, conforme também ilustradas na Figura 9, podem ser obtidas clicando no botão "Valor" localizado no item "Reações de apoio".

Figura 7 - Esquema da viga biapoiada inserida no aplicativo "Magie".



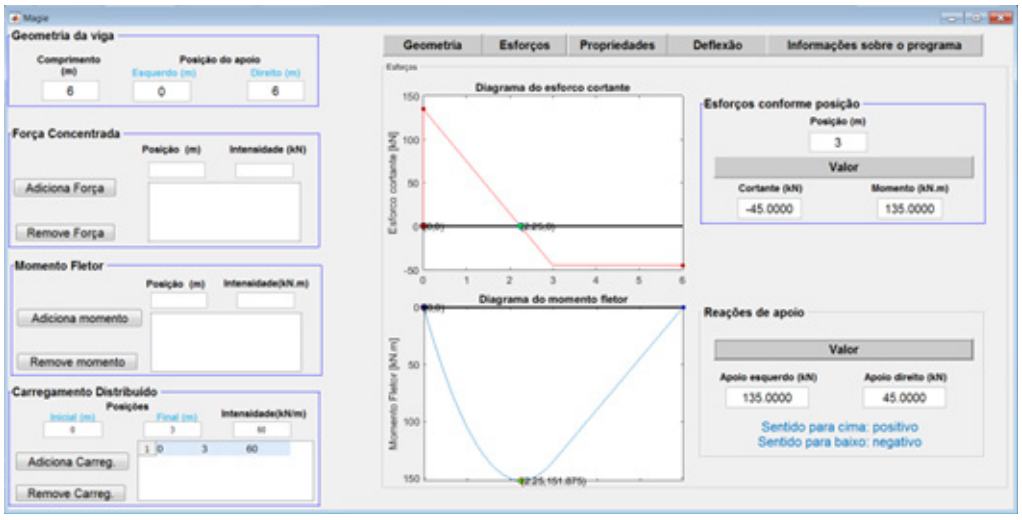
Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 8 - Viga biapoiada com carregamento distribuído modelada no aplicativo computacional.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 9 - Solicitações internas e reações de apoio da viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído.

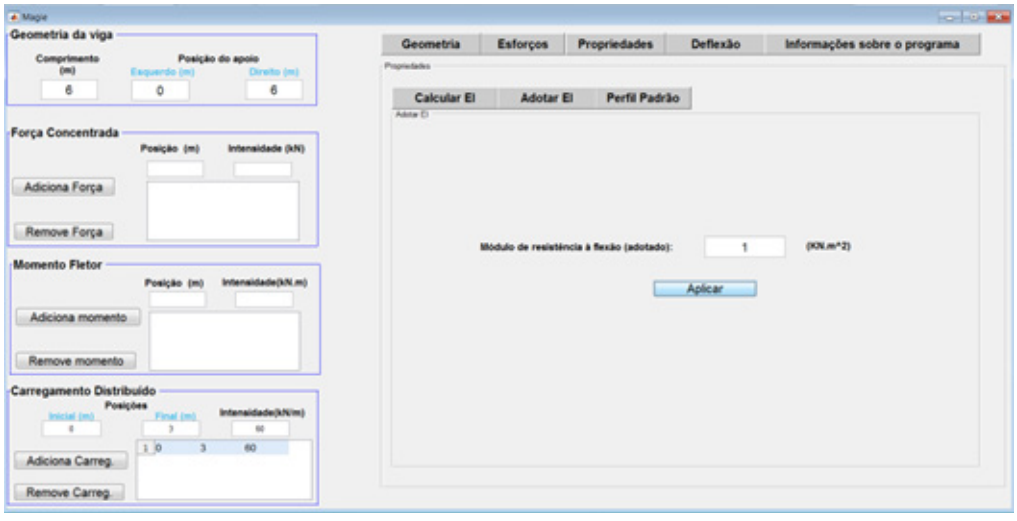


Fonte: Elaborado pelos autores.

Como exemplo, conforme pode ser visto na Figura 9, o valor do esforço cortante na posição x = 3 m é igual a -45 kN, enquanto o momento fletor é igual a 135 kN.m. Já as reações de apoio no apoio *A* (mais à esquerda da viga) e B (mais à direita) são iguais, respectivamente, a 135 kN e 45 kN, ambas positivas, ou seja, com sentido de baixo para cima.

Ao clicar no menu das "Propriedades", localizado na barra de menus horizontais da parte superior da janela principal do aplicativo computacional, o usuário pode escolher um formato de perfil padrão, pré-armazenado no aplicativo, selecionando a opção "Perfil Padrão" dentro desse menu. O usuário também pode adotar diretamente o valor do módulo *EI* na opção "Adotar EI" do menu das "Propriedades". Uma terceira opção de inserção possível das propriedades geométricas da seção transversal de viga e do seu material é "Calcular EI", onde o usuário insere o módulo de Young *E* do material da viga e escolhe uma das opções de seções transversais disponíveis internamente no aplicativo. Procedendo dessa maneira, o *software* calcula o momento de inércia *I* da seção escolhida e informar o produto do *EI.*

Figura 10 - Módulo de resistência à flexão da Viga-I adotado no aplicativo "Magie".



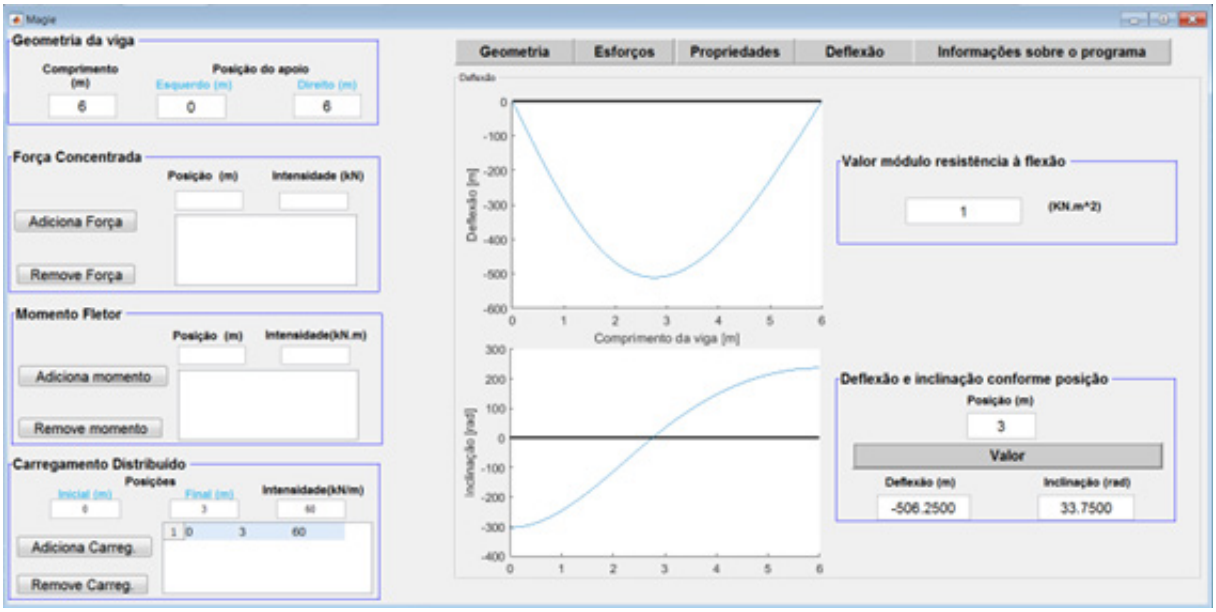
Fonte: Elaborado pelos autores.

A Figura 10 ilustrada a seleção da opção "Adotar EI", onde é adotado módulo de resistência à flexão *EI* constante e igual a 1. Esse valor é armazenado internamento na "memória" do aplicativo computacional ao clicar no botão "Aplicar".

Ao clicar no menu "Deflexão", localizado da barra de menus horizontais do aplicativo, a Linha Elástica e a inclinação da viga obtidas são ilustradas no *software*, conforme ilustrado na Figura 11. Além disso, o programa "recupera" e informa o valor módulo *EI* obtido ou informado anteriormente no menu "Propriedades".

Tal como nos diagramas dos esforços internos V e M, obtidos no menu "Esforços", o usuário também pode informar ao aplicativo uma posição x_i de interessa para a obtenção da deflexão vertical (v_i) e da rotação (q_i) sofridas pela viga. A figura 11 ilustra na janela "Deflexão e inclinação conforme posição" os valores da deflexão (-506,25/EI), em m, e da rotação (33,75/EI), em rad, da Viga I para a posição x_i de 3 m. Ao inserir as posições x = 0 e x = 6 m, são obtidas as rotações nos apoios direito (q_R) e esquerdo (θ_L) da Viga I, conforme informado na Tabela 2.

Figura 11 - Linha elástica, inclinação, deflexão vertical e rotação da **Viga-1** obtidas no aplicativo "Magie".

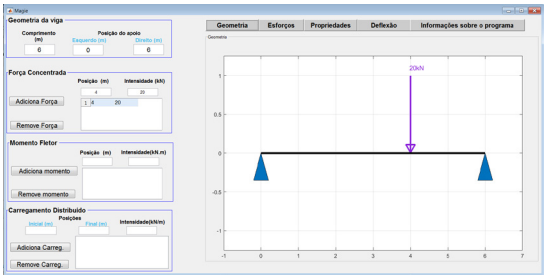


Fonte: Elaborado pelos autores.

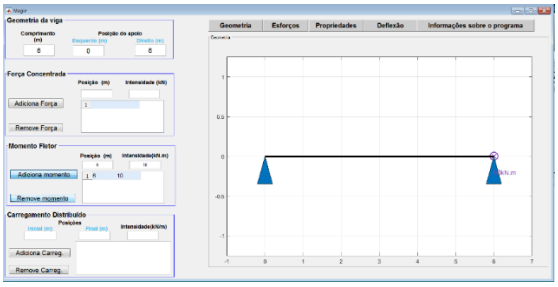
As vigas **II**, **III** e **IV são ilustradas na Figura** 12.

A Tabela 2 fornece os valores da deflexão vertical na posição central (x = 3 m) e as rotações dos apoios obtidos para as vigas biapoiadas I, II, II, IV e V, sujeitas respectivamente a carga uniformemente distribuída (q), força concentrada (f), momento concentrado (m) e carregamentos múltiplos ($q + f + m$), obtidos no aplicativo computacional desenvolvido com o uso de Funções de Descontinuidade (FD) e obtidas empregando as expressões analíticas aproximadas fornecida por Hibbeler (2013), ou seja, sem o uso das FD. Nota-se que os valores analíticos (sem FD) são idênticos aos correspondentes valores obtidos pelo *software* desenvolvido (com FD), apresentando uma diferença percentual (DP) de 0 % entre eles, independente da viga analisada.

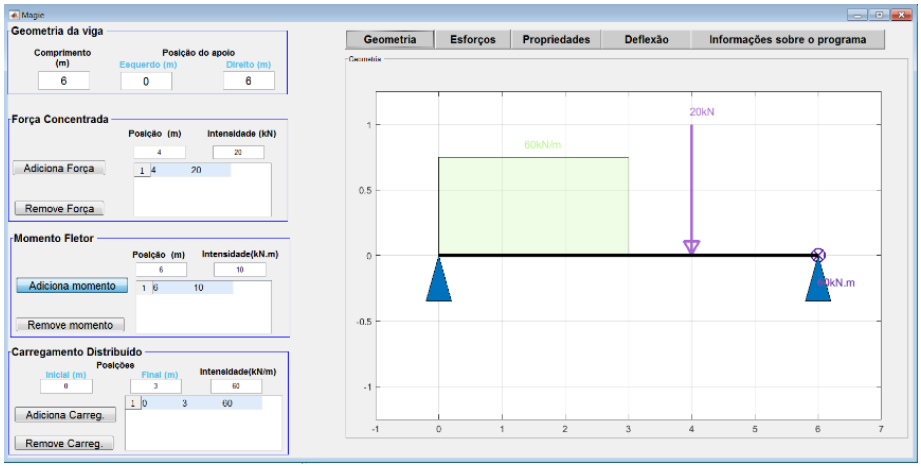
Figura 12 - Diferentes tipos de vigas biapoiadas em estudo sujeitas a: (a) carga concentrada, (b) momento concentrado, e (c) dotada de múltiplos carregamentos, modeladas no aplicativo "Magie".



(a) Viga II



(b) Viga III



Viga IV

Fonte: Elaborado pelos autores.

Tabela 2 - Deflexão e rotação localizadas obtidas para diferentes tipos de vigas, tanto no aplicativo computacional desenvolvido quanto analiticamente.

Tipo de viga		Deflexão vertical /EI (x = 3 m)	DP (%)	Rotação/EI (x = 0 m)	DP (%)	Rotação/EI (x = 6 m)	DP (%)
I	com FD	-506,25000	0	-303,75000	0	236,25000	0
	sem FD	-506,25000		-303,75000		236,25000	
II	com FD	-76,66667	0	-35,55556	0	44,44444	0
	sem FD	-76,66667		-35,55556		44,44444	
III	com FD	22,50000	0	10,00000	0	-20,00000	0
	sem FD	22,50000		10,00000		-20,00000	
IV	com FD	-560,41667	0	-329,30556	0	260,69444	0
	sem FD	-560,41667		-329,30556		260,69444	

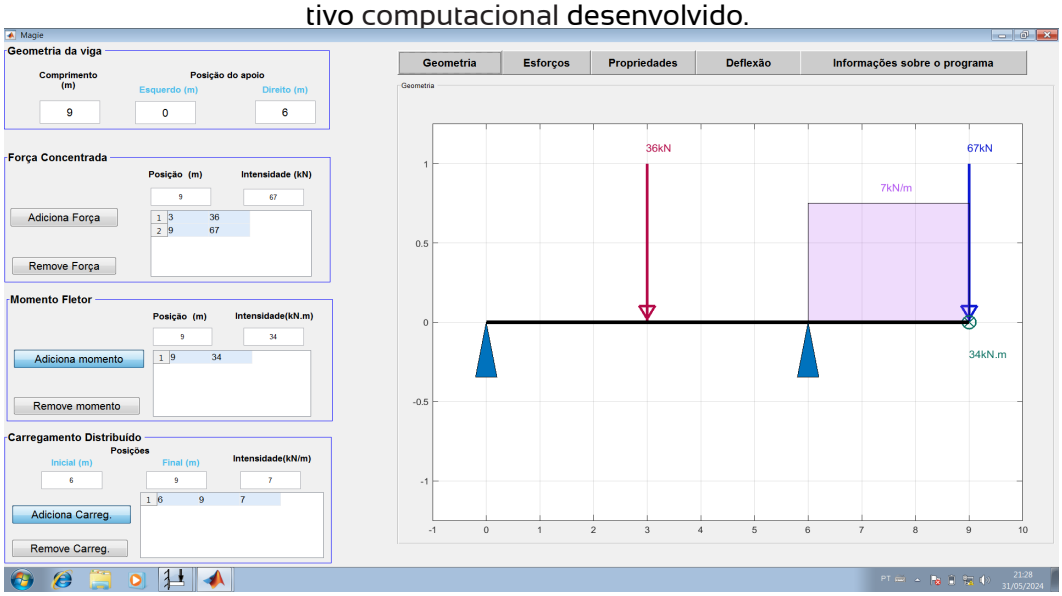
Legenda: DP - Diferença percentual entre os valores da viga com e sem FD.
Fonte: Elaborado pelos autores.

Viga biapoiada com balanço e submetida à múltiplas solicitações externas

A próxima aplicação numérica, a viga biapoiada com balanço à direita ilustrada na Figura 1, em b, é submetida a duas cargas concentradas f_1 e f_2 iguais a 36 kN e 67 kN, respectivamente, a uma

carga uniformemente distribuída *q* igual a 7 kN/m e a um momento concentrado *m* igual a 34 kN.m, localizados nas posições indicadas na Figura 1(b). A Figura 13 ilustra essa viga biapoiada modelada no aplicativo desenvolvido.

Figura 13 - Viga biapoiada com um balanço, sujeita a múltiplos carregamentos, modelada no aplicativo computacional desenvolvido.

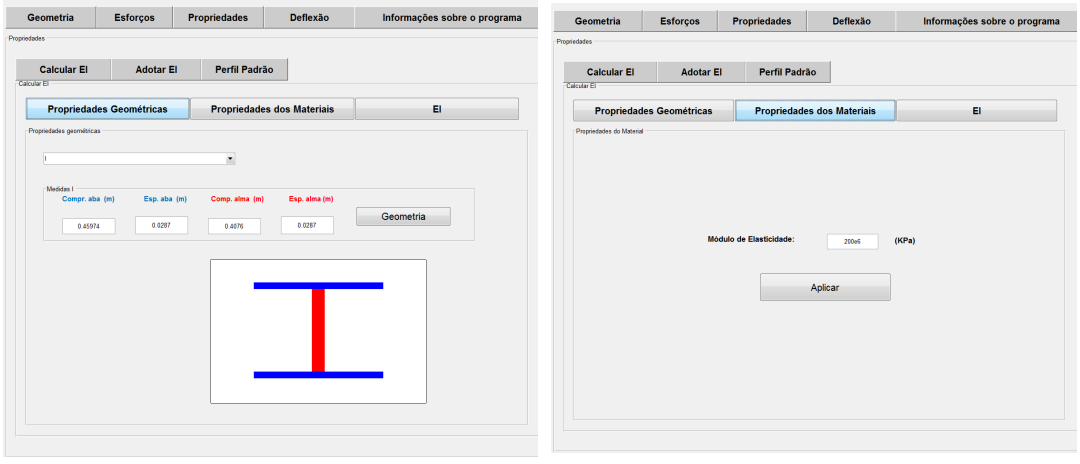


Fonte: Elaborado pelos autores.

A viga em estudo é do tipo metálica, sendo sua seção transversal do tipo "I", designada como HP460x304. Ela apresenta abas com largura 459,75 mm, alma com largura 407,6 mm alma e abas com espessura de 28,7 mm, como ilustrado na Figura 14, em (a).

O módulo de Young *E* do material constituinte da viga é informado no aplicativo computacional no item "Propriedades dos Materiais", como ilustrado na Figura 14, em (b), sendo igual a 200 x 10^9 Pa, com tensão de escoamento e tensão limite de resistência iguais a 248 MPa e 400 MPa, respectivamente.

Figura 14 - Seção transversal do tipo I (a) e módulo de elasticidade do material (b) da viga em balanço em estudo.

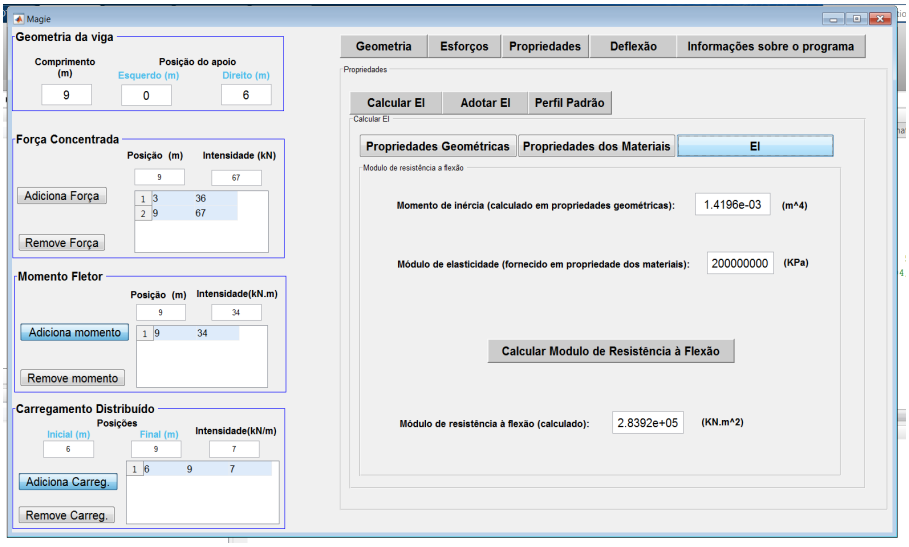


(a) **(b)**

Fonte: Elaborado pelos autores.

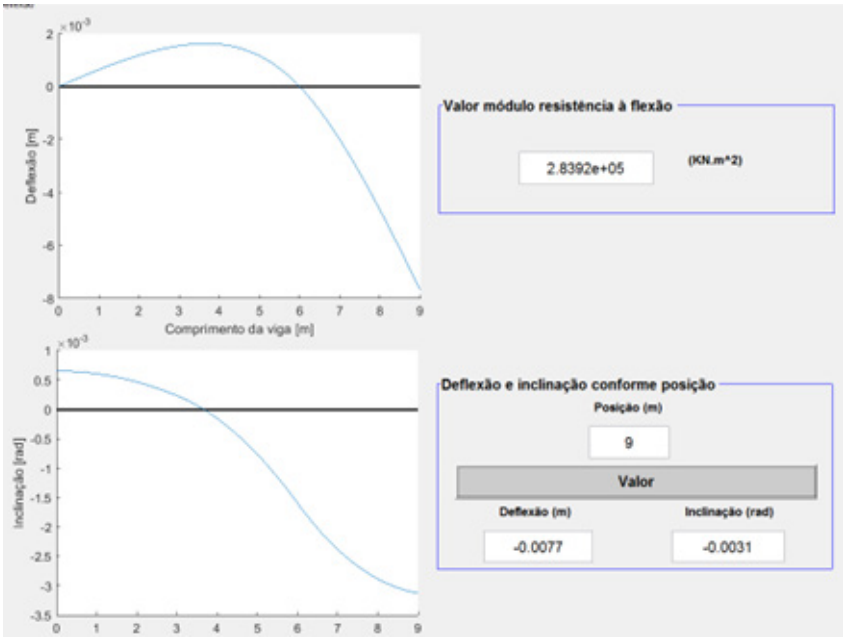
Como o momento de inércia *I* obtido pelo aplicativo é igual a 1,4196x10^{-3} m^4, o módulo de resistência à flexão *EI* da seção da viga analisada é igual a 2,8392x10^5 kN.m^2, informado após clicar na opção "Calcular Módulo de Resistência Flexão" ilustrado na Figura 15. O momento de inércia é calculado pelo aplicativo computacional no item "Propriedades Geométricas", conforme entrada de dados da seção transversal da viga informadas na Figura 14(a), enquanto o módulo de Young é adotado em "Propriedades dos Materiais, conforme pode ser visto na Figura 14(b).

Figura 15 - Momento de Inércia e módulo de resistência a flexão obtidos no aplicativo desenvolvido para a viga biapoiada com um balanço.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 16 - Linha Elástica e inclinação obtidas para a viga biapoiada com um balanço no aplicativo computacional desenvolvido.

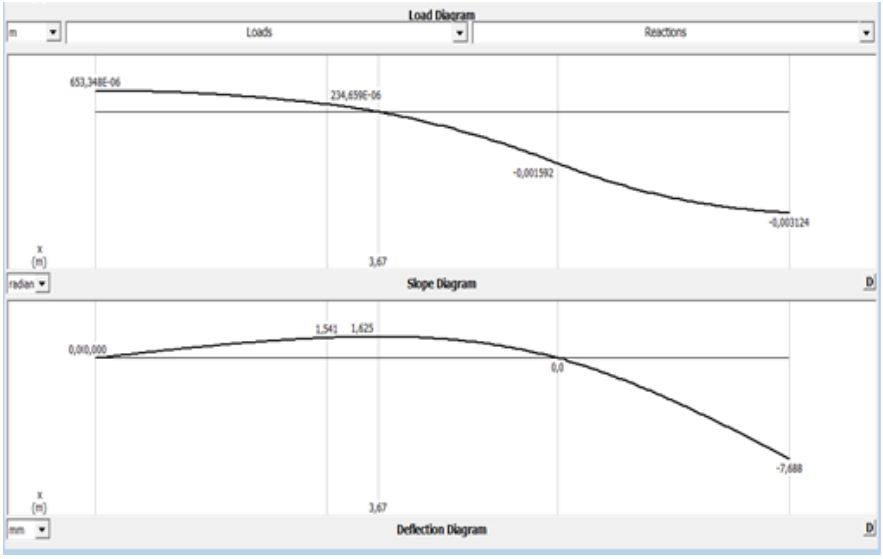


Fonte: Elaborado pelos autores.

O valor do módulo *EI*, calculado no item "Calcular EI", também é informado pelo aplicativo no item "Valor módulo de resistência à flexão", localizada no menu "Deflexão", conforme ilustrado na Figura 16. Já a Linha Elástica, em metros, e inclinação, em radianos, da viga são ilustradas na mesma figura.

A Figura 17 ilustrada os resultados obtidos para a mesma viga empregando por sua vez o *software* MDSolids, mostrando-se que foram idênticos.

Figura 17 - Linha elástica, em mm, e inclinação, em radianos, obtidas com o *software* DMSolids.



Fonte: *Software* DMSolids de Philpot (2014).

Como pode ser observado nas Figuras 16 e 17, para a posição x = 9, os valores da deflexão vertical (v) e da rotação (θ) sofridas pela viga em estudo são aproximadamente iguais a -7,7 x 10^{-3} m e -0,0031 rad, respectivamente, obtidas em ambos os programas. Além disso, o formato da Linha Elástica (LE) e da inclinação obtida empregando ambos os aplicativos computacionais é idêntico, como ilustrado na Figura 18. Na Tabela 3 são apresentados os valores de v e θ obtidos para diferentes posições x (variando de 1 em 1 metro) ao longo do comprimento da viga em estudo.

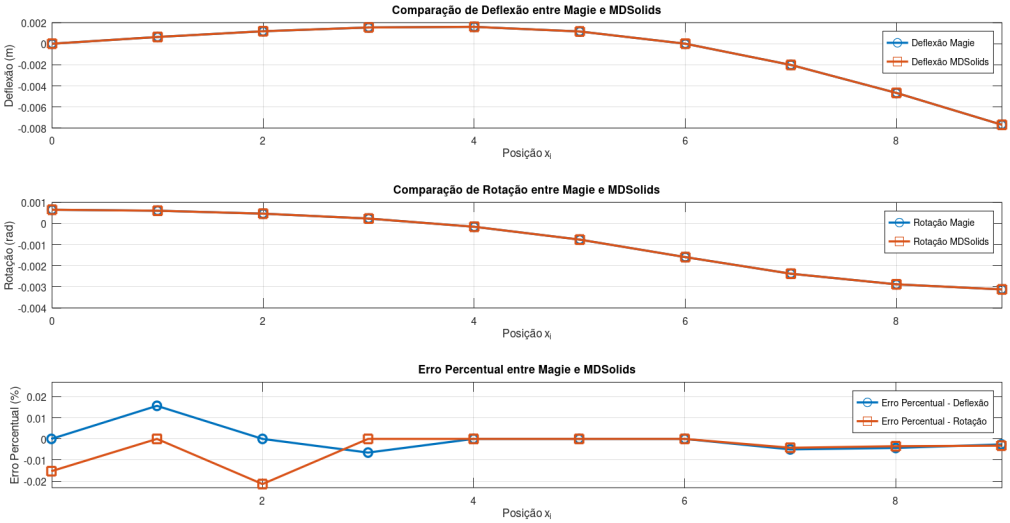
Tabela 3 - Deflexão vertical e rotação para diferentes posições ao longo do comprimento da viga biapoiada com um balanço.

Posição	"Magie"		"MDSolids"		Erro Percentual	
x_i	Deflexão x 10^{-3} (m)	Rotação x 10^{-3} (rad)	Deflexão x 10^{-3} (m)	Rotação x 10^{-3} (rad)	Deflexão (%)	Rotação (%)
0	0	0,6534	0	0,6533	0,0000	-0,0153
1	0,6378	0,6068	0,6379	0,6068	0,0157	0,0000
2	1,1826	0,4673	1,1826	0,4672	0,0000	-0,0214
3	1,5414	0,2347	1,5413	0,2347	-0,0065	0,0000
4	1,5998	-0,1544	1,5998	-0,1544	0,0000	0,0000
5	1,1593	-0,7633	1,1593	-0,7633	0,0000	0,0000
6	0	-1,5920	0	-1,5920	0,0000	0,0000
7	-2,0107	-2,3798	-2,0106	-2,3797	-0,0050	-0,0042
8	-4,6645	-2,8823	-4,6643	-2,8822	-0,0043	-0,0035
9	-7,6883	-3,1241	-7,6881	-3,1240	-0,0026	-0,0032

Fonte: Elaborado pelos autores (2024) *software* "Magie" e obtidos no *software* DMSolids de Philpot (2014).

Como pode ser observado na Tabela 3 e ilustrado na Figura 18, o erro percentual máximo entre os valores obtidos da deflexão e rotação empregando os dois aplicativos foi de no máximo 0,0157 % para a deflexão e de -0,0214 % para a rotação, ou seja, muito baixos. Nos cálculos percentuais foi utilizado como referência os valores obtidos com o *software* MDSolids.

Figura 18 - Linha elástica e inclinação da viga biapoiada com um balanço utilizando os *softwares* "Magie" e DMSolids.

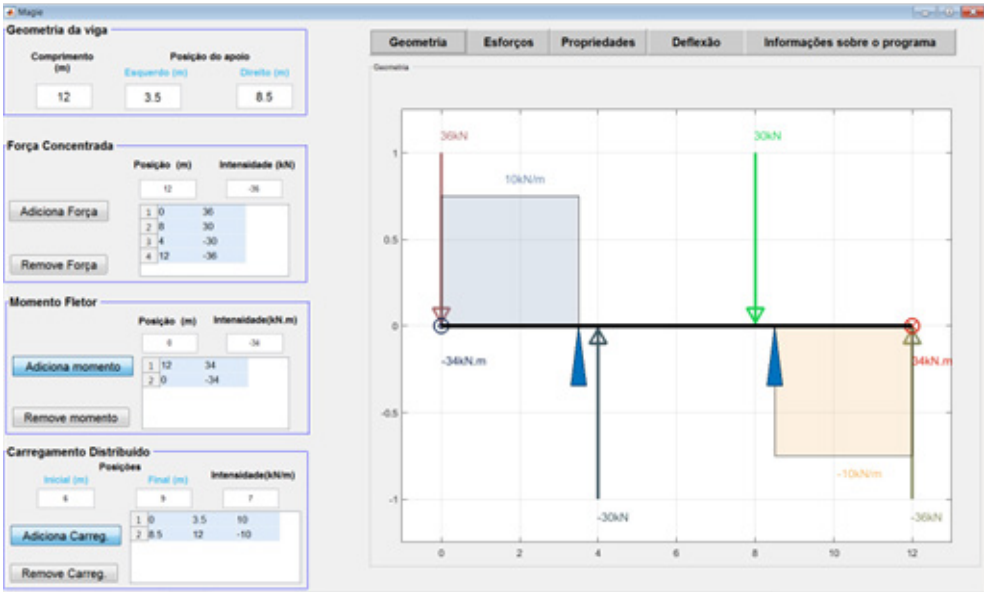


Fonte: Elaborado pelos autores (2024) no *software* desenvolvido e no DMSolids de Philpot (2014).

Viga biapoiada com balanços e submetida à múltiplas solicitações externas

A viga biapoiada com dois balanços em estudo é ilustrada na Figura 19, e apresenta geometria simétrica e carregamentos aplicados de maneira assimétrica. Essa simulação tem o propósito de exemplificar a visualização de múltiplos carregamentos aplicados ao longo do comprimento de uma viga, empregando o aplicativo desenvolvido.

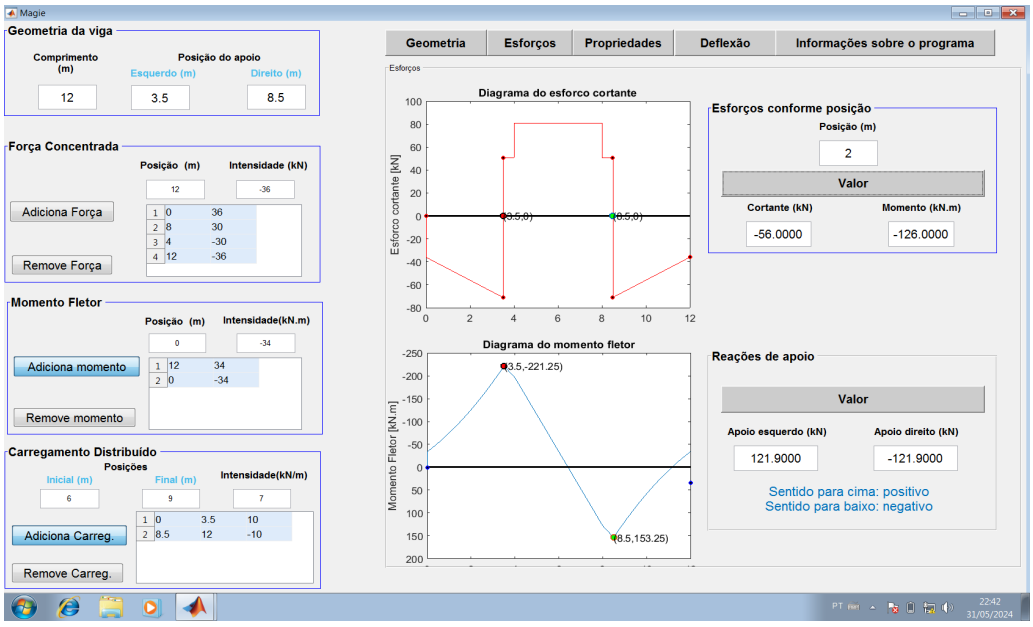
Figura 19 - Viga biapoiada com balanços sujeita a múltiplos carregamentos.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Figura 20, são apresentados os diagramas das solicitações internas dessa viga, suas reações de apoio e as solicitações internas (*V* e *M*) para uma seção localizada em *x* = 2 m. O módulo de resistência à flexão da viga é o mesmo obtido na simulação anterior, ou seja, 2,8392x10^5 kN.m^2.

Figura 20 - Diagrama das solicitações internas de uma viga biapoiada com balanços sujeita a múltiplos carregamentos.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Conclusão

Esse trabalho apresenta a aplicação das funções de descontinuidade no desenvolvimento de um aplicativo computacional gratuito e dedicado ao estudo de vigas, chamado "Magie", implementado na plataforma MATLAB. Esse aplicativo pode ser utilizado para estudar os deslocamentos generalizados (deflexão e rotação), as solicitações internas (esforços cortante e momento fletor) e obter as reações de apoio de vigas biapoiadas, isostáticas e homogêneas, sujeitas a múltiplos carregamentos. Além disso, o aplicativo permite a escolha de diferentes tipos de seções transversais de vigas, conforme interesse do usuário.

A linguagem de programação do MATLAB é utilizada para implementar o algoritmo das funções de descontinuidade, que são empregadas na formulação das derivadas das equações diferenciais que descrevem o comportamento mecânico desse tipo de vigas submetidas a diferentes tipos de carregamentos externos. Esse algoritmo numérico, integrado ao aplicativo computacional "Magie" desenvolvido, permite a aplicação de múltiplas cargas, tais como cargas concentradas, momentos concentrados e cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento da viga. Essa integração facilita o estudo dos deslocamentos generalizados, das solicitações internas e das reações de apoio dessas vigas.

Este trabalho inclui a validação numérica dos algoritmos e do aplicativo computacional desenvolvido, comparando seus resultados com formulações analíticas e numéricas, incluindo o uso do *software* MDSolids. Os resultados obtidos pelo aplicativo são confrontados e validados em termos dos diagramas das solicitações internas (cortante e momento), da linha elástica e inclinação, da deflexão e rotação, e das reações de apoio para diversos tipos de vigas isotrópicas, isostáticas e biapoiadas, com módulo de resistência à flexão adotado ou obtido adotando uma seção transversal do tipo "I" e módulo *E* de Young do material da viga.

A apresentação dos algoritmos das funções de descontinuidade implementadas no aplicativo computacional visa facilitar o entendimento matemático, a sua programação no MATLAB ou

em outras linguagens de programação como Octave, Python, C++, entre outras, e promover a disseminação do uso prático dessas funções na solução das equações diferenciais que governam as solicitações internas e deslocamentos generalizados em vigas isostáticas. Especialmente útil, pois as expressões matemáticas envolvidas na solução analítica aproximada do problema podem ser tediosas de serem obtidas e resolvidas.

Como possibilidades de trabalhos futuros, destacam-se a implementação de estruturas hiperestáticas na plataforma, a consideração de outros tipos de carregamentos distribuídos (como carregamentos lineares dos tipos triangular e trapezoidal) aplicados sobre as vigas, a inclusão de vigas engastadas e a formulação da plataforma em linguagem Java, visando sua utilização e disseminação em smartphones, o que ampliaria sua acessibilidade para uma gama maior de usuários.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro da bolsa de iniciação cientifica disponibilizada durante a realização desse trabalho.

Referências

CALDERÓN, E. T.; SOUZA, V. B. Utilização de funções de descontinuidade no cálculo de esforços solicitantes e deslocamentos em vigas isostáticas. **Revista Mirante**, Anápolis, v. 15, n. 2, 2022. Doi:10.31668/mirante.v15i2.13414

CONFORTI, A.; MINELLI, F.; PLIZZARI, G. A. Wide-shallow beams with and without steel fibres: A peculiar behaviour in shear and flexure. **Composites: Part B**, v. 51, p. 282-290, 2013. Doi: 10.1016/j.compositesb.2013.03.033

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais.** 10.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2019.

HIBBELER, R.C. **Análise das Estruturas**. 8.ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2013.

LEET, K. M.; UANG, C-M; GILBERT, A. M. **Fundamentos da análise estrutural**, 5. ed. New York: McGraw Hill, 2018.

PHILPOT, T. A. **Educational Software for Mechanics of Materials – MDSolid**. Versão 4.2.0. 2014. Disponível em: https://web.mst.edu/~mdsolids/ . Acesso em: 30 de jun. de 2023

HASSAN, E.; ABOSHGIFA, A. Detecting Brain Tumour from MRI Images Using Matlab GUI Program. **International Journal of Computer Science & Engineering Survey**, v. 6, n. 6, p. 47-60, 2015. Doi: 10.5121/ijcses.2015.6604

SOUZA, A.; CASTILLO, P. F. A. Predição de pressões de saturação de componentes presentes na obtenção do biodiesel. In: **Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia Química em Iniciação Científica**, em COBEQ, XII, 2017, São Carlos. Anais do COBEQ 2017, São Carlos: Blucher, 2017. v. 1, n. 4, p. 2076 – 2081, 2017. Doi: 0.5151/chemeng-cobeqic2017-36